

1a Tellen (van de eindpunten) geeft 6 keuzemogelijkheden. Berekening:  $3 \times 2 = 6$ .

1b Voordeel van een wegendiagram: minder werk om te maken.  
Nadeel van een wegendiagram: de keuzemogelijkheden staan niet apart vermeld.

B	6	7	8	9	10	11	12
L	5	6	7	8	9	10	11
A	4	5	6	7	8	9	10
U	3	4	5	6	7	8	9
W	2	3	4	5	6	7	8
E	1	2	3	4	5	6	7
		+	1	2	3	4	5
						R	O
						D	E

2a Neem het rooster hiernaast over.

2b Er zijn 10 mogelijkheden om samen minstens 9 te gooien. (zie hiernaast)

2c 36, 45, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66.

3a Bij een halve competitie speelt elk team één keer tegen elk ander team.

3b Liefst een rooster. (maak er zelf ook een)

3c Er zijn  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  wedstrijden. (de grijze vakjes)

3d Aantal wedstrijden:  $(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$  of  $(n^2 - n) : 2 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ .

(tel eerst alle hokjes in het rooster  $\Rightarrow n \times n = n^2$ ; trek daar de  $n$  hokjes van de diagonaal van linksboven naar rechtsonder vanaf en deel dan nog door 2)

	4v1	4v2	4h1	4h2	4h3
4v1	-	-	-	-	-
4v2		-	-	-	-
4h1			-	-	-
4h2				-	-
4h3					-

3e  $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 45 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 45 = 0 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+9) = 0 \Rightarrow n = 10$  (of  $n = -9$  voldoet niet).

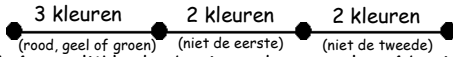
4a Vijf teams spelen bij een hele competitie  $5 \times 4 = 20$  wedstrijden. (gebruik het rooster hierboven)

In de voorronden dus  $8 \times 20 = 160$  wedstrijden; in de kwartfinale (laatste 8 teams)  $4 \times 2 = 8$  wedstrijden;

in de halve finale (laatste 4 teams)  $2 \times 2 = 4$  en in de finale (laatste 2 teams)  $1 \times 2 = 2$  wedstrijden.

Dus totaal  $160 + 8 + 4 + 2 = 174$  wedstrijden.

4b  $4 \times 2$  (in de voorronde) +  $2$  (in de kwartfinale) +  $2$  (in de halve finale) +  $2$  (in de finale) =  $14$ .

5  $3 \times 2 \times 2 = 12$ . (zie het vereenvoudigde wegendiagram hiernaast)   
(of uitschrijven: ro ge gr, ro ge ro, ro gr ge, ro gr ro en zo ook 4 mogelijkheden beginnend met geel en 4 beginnend met groen)

6a BAAA, ABAA, AABA (A winnaar in vier sets  $\Rightarrow$  A staat na 3 sets al met 2-1 voor);

ABBB, BBBB, BBAB (B winnaar in vier sets  $\Rightarrow$  B staat na 3 sets al met 2-1 voor)

6b AAA (A winnaar in drie sets); BBB (B winnaar in drie sets);

BBAAA, BBAA, AABBA, BABAA, BAABA, ABABA (A winnaar in vijf sets  $\Rightarrow$  na 4 sets is het 2-2);

AABBB, BAABB, BBAAB, ABABB, ABBAB, BABAB (B winnaar in vijf sets  $\Rightarrow$  4 sets is het 2-2).

Dus totaal  $2$  (na 3 sets) +  $6$  (na 4 sets) +  $12$  (na 5 sets) =  $20$  manieren.

7a Som is 8 kan op 4 manieren. (zie het rooster hiernaast)

7b Som is minder dan 8 kan op 18 manieren. (zie de grijze hokjes hiernaast)

7c Product is 8 kan op 3 manieren. (maak een nieuw rooster of: 24, 42 en 18)

4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9

SOM 1 2 3 4 5 6 7 8

8a 16 ogen met de series 556, 565, 655, 466, 646 en 664  $\Rightarrow$  6 mogelijkheden.

8b 17 ogen met 566, 656 en 665; 18 ogen met 666  $\Rightarrow$  meer dan 15 ogen heeft  $6 + 3 + 1 = 10$  mogelijkheden.

8c 15 ogen met 663, 636, 366, 654, 645, 546, 564, 456, 465 en 555  $\Rightarrow$  10 mogelijkheden.

9a 5 ogen met 113, 131, 311, 122, 212 en 221  $\Rightarrow$  6 mogelijkheden.

9b 3 ogen met 111; 4 ogen met 112, 121 en 211; 5 ogen met 113, 131, 311, 122, 212 en 221;

6 ogen met 114, 141, 411, 123, 132, 213, 231, 312, 321 en 222  $\Rightarrow 1 + 3 + 6 + 10 = 20$  mogelijkheden.

10a  $1 \times \text{€}50$  en  $1 \times \text{€}20$ ;  $1 \times \text{€}50$  en  $2 \times \text{€}10$ ;  $3 \times \text{€}20$  en  $1 \times \text{€}10$ ;  $2 \times \text{€}20$  en  $3 \times \text{€}10$ ;  $1 \times \text{€}20$  en  $5 \times \text{€}10$ ;  $7 \times \text{€}10$ .

10b  $2 \times \text{€}50$ ;  $1 \times \text{€}50$   $2 \times \text{€}20$  en  $1 \times \text{€}10$ ;  $1 \times \text{€}50$   $2 \times \text{€}20$  en  $1 \times \text{€}10$ ;  $1 \times \text{€}50$   $1 \times \text{€}20$  en  $3 \times \text{€}10$ ;

$1 \times \text{€}50$  en  $5 \times \text{€}10$ ;  $5 \times \text{€}20$ ;  $4 \times \text{€}20$  en  $2 \times \text{€}10$ ;  $3 \times \text{€}20$  en  $4 \times \text{€}10$ ;  $2 \times \text{€}20$  en  $6 \times \text{€}10$ ;

$1 \times \text{€}20$  en  $8 \times \text{€}10$ ;  $10 \times \text{€}10 \Rightarrow 11$  mogelijkheden.

sp\mu	wel	niet	
wel	8	10	18
niet	4	10	14
	12	20	32

11 8 leerlingen die aan muziek én aan sport doen. (zie de tabel hiernaast)

12 15 leerlingen hebben voor beide een voldoende.

wi\en	onvold.	vold.	
onvold.	4	2	6
vold.	7	15	22
	11	17	28

13 410 zonder bekeuring  $\Rightarrow \frac{410}{512} \times 100\% = 80,1\%$ .

alc\techn	goed	slecht	
pos.	70	6	76
neg.	410	26	436
	480	32	512

410/512	.80078125
Ans*100	80.078125

14a  $4 \times 3 \times 3 = 36$  mogelijkheden.

14b  $2 (200\text{m of } 400\text{m}) \times 2 (\text{niet kogel}) \times 1 (\text{volleybal}) = 4$  mogelijkheden.



15a  $AAA$  kan op  $2 \times 4 \times 5 = 40$  manieren.

15b  $AAA$  of  $BBB$  of  $CCC$  kan op  $2 \times 4 \times 5 + 2 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 0 = 40 + 12 + 0 = 52$  manieren.

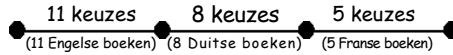
15c  $AAC$  of  $ACA$  of  $CAA$  kan op  $2 \times 4 \times 0 + 2 \times 2 \times 5 + 1 \times 4 \times 5 = 0 + 20 + 20 = 40$  manieren.

15d  $\overline{BBB}$  kan op  $3 \times 6 \times 5 = 90$  manieren. ( $\overline{B}$  is een korte schrijfwijze voor: geen B)

15e  $gegege$  of  $grgrgr$  of  $blblbl$  of  $rororo$  kan op  $1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 4 + 4 + 4 + 8 = 20$  manieren.

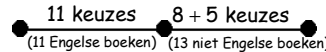
15f  $grgrro$  of  $grrogr$  of  $rogrgr$  kan op  $1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 4 + 4 + 8 = 16$  manieren.

16a  $E D F$  kan op  $11 \times 8 \times 5 = 440$  manieren.



$11 \times 8 \times 5$	440
$11 \times (8+5)$	143

16b  $E \overline{E}$  kan op  $11 \times (8+5) = 143$  manieren.



17a vlees vlees vlees  $\Rightarrow 4 \times 2 \times 5 = 40$  manieren.

17b fruit fruit fruit  $\Rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$  manieren.

17c vlees vlees vlees of vis vis vis of fruit fruit fruit  $\Rightarrow 4 \times 2 \times 5 + 3 \times 2 \times 4 + 3 \times 2 \times 2 = 40 + 24 + 12 = 76$  manieren.

17d vis fruit fruit  $\Rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$  manieren.

17e vis fruit fruit of fruit vis fruit of fruit fruit vis  $\Rightarrow 3 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 \times 4 = 12 + 12 + 24 = 48$  manieren.

18a  $3 \times 4 \times 6 \times 3 = 216$ . (bij de jasjes zijn 3 keuzes namelijk: het ene jasje, het andere jasje of geen jasje)

$3 \times 4 \times 6 \times 3$	216
--------------------------------	-----

18b Een rok óf broek kan op  $4 + 3 = 7$  manieren; blouse of trui OF blouse én trui kan op  $(6 + 4) + 6 \times 4 = 34$  manieren. Zij kan zich op  $5 \times 7 \times 34 \times 4 = 4760$  manieren kleden.

$5 \times 7 \times 34 \times 4$	4760
$5 \times 4 \times 7 \times 4 \times 4$	2240

18c  $5 (\text{schoenen}) \times 4 (\text{rok}) \times 1 (\text{geen broek}) \times 7 (\text{blouse of geen blouse}) \times 4 (\text{coltrui}) \times 4 (\text{jas of geen jas}) = 2240$ .

19a  $8 \times 5 \times 7 \times 3 \times 11 = 9240$ .

19b  $7 \times 4 \times 6 \times 2 \times 10 = 3360$ . (van elke paragraaf is 1 opgave reeds gebruikt)

19c  $8 \times 5 \times 3 \times 11 (\$1, \$2, \$4, \$5) + 8 \times 7 \times 3 \times 11 (\$1, \$3, \$4, \$5) + 5 \times 7 \times 3 \times 11 (\$2, \$3, \$4, \$5) = 4323$ .

$8 \times 5 \times 7 \times 3 \times 11$	9240
$7 \times 4 \times 6 \times 2 \times 10$	3360
$8 \times 5 \times 3 \times 11 + 8 \times 7 \times 3 \times 11$	4323

20a eerst een jongen en dan een meisje  $\Rightarrow 14 \times 17 = 238$  manieren.

$14 \times 17$	238
$19 \times 7$	133
$14 \times 5$	70

20b eerst iemand van 15 en dan iemand van 17  $\Rightarrow 19 \times 7 = 133$  manieren.

20c eerst een jongen en dan een meisje van 17  $\Rightarrow 14 \times 5 = 70$  manieren.

$5 \times 26 \times 2$	260
$12 \times 19 + 7 \times 5$	263

20d de eerste 16 en de tweede  $\overline{16}$  of de eerste  $\overline{16}$  en de tweede 16  $\Rightarrow 5 \times 26 + 26 \times 5 = 130 \times 2 = 260$  manieren.

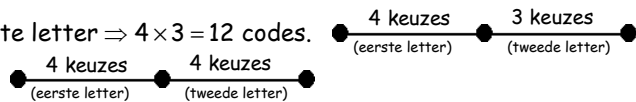
20e eerst iemand van  $\overline{15}$  en dan iemand van 15 of eerst iemand van 17 en dan van 16  $\Rightarrow 12 \times 19 + 7 \times 5 = 263$  manieren.

21a Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als de eerste een meisje van 15 en tweede een jongen van 16?

21b En hoeveel tweetallen als er een jongen en een meisje gekozen worden van wie de een van 17 en de ander van 15?

22b • de tweede letter een andere letter dan de eerste letter  $\Rightarrow 4 \times 3 = 12$  codes.

• de letters mogen gelijk zijn  $\Rightarrow 4 \times 4 = 16$  codes.



23a  $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ .

$6 \times 5 \times 4 \times 3$	360
$3 \times 5 \times 4 \times 3$	180

23b  $3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$ . (het eerste cijfer moet een 3, 4 of 5 zijn)

23c  $1 \times 2 \times 6 \times 6 = 72$ . (het eerste cijfer een 6 en het tweede cijfer een 5; daarna mag elk cijfer)

23d  $1 \times 4 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 576$ . (eerst een 6 en als tweede cijfer minstens een 5 OF beginnend met een 7 of 8)

$1 \times 2 \times 6 \times 6$	72
$1 \times 4 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 \times 6$	576

24a  $26 \times 26 \times 26 = 17576$ .

24b  $26 \times 25 \times 25 = 16250$ .

24c  $1 \times 26 \times 26 = 676$ .

$26^3$	17576
$26 \times 25^2$	16250
$26^2$	676
$10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 1$	17576000
$10 \times 10 \times 2 \times 21 \times 21 \times 10$	882000
$10 \times 9 \times 2 \times 20 \times 19 \times 8$	547200
$10 \times 10 \times 17 \times 21 \times 21 \times 1$	7497000

25a  $10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 = 17\,576\,000$ . (ons alfabet telt 26 letters)

25b  $10 \times 10 \times 2 \times 21 \times 21 \times 10 = 882\,000$ . (letters beginnen met een D of F; er zijn 5 klinkers: A, E, I, O en U)

25c  $10 \times 9 \times 2 \times 20 \times 19 \times 8 = 547\,200$ . (letters beginnen met een D of F en klinkers komen niet voor)

25d  $10 \times 10 \times 17 \times 21 \times 21 \times 10 = 7\,497\,000$ . (letters beginnen niet met een A, B, C, D, E, F, I, O of U)

26a  $4 \times 4 \times 4 \times \dots \times 4 = 4^{10} = 1048576.$  26b  $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024.$  (5 vragen gokken)

$4^{10}$	1048576
$4^5$	1024

27a  $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024.$  27c  $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324.$   
 27b  $1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256.$  (codes beginnen met ♥)

$4^5$	1024
$4^4$	256

$4 \cdot 3^4$	324
---------------	-----

27d  $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 5 = 15.$   
 (\*\*\*\*\* of \*\*\*\*\* of \*\*\*\*\* of \*\*\*\*\* of \*\*\*\*\*)

28a  $15 \times 26 \times 25 = 9750.$   
 28b  $15 \times 12 \times 11 = 1980.$

$15 \cdot 26 \cdot 25$	9750
$15 \cdot 12 \cdot 11$	1980

28c  $15 \times 12 \times 25 + 12 \times 15 \times 25 = 9000.$  (?mj of ?jm)  
 (begin met drank, dan hapjes en tenslotte muziek)

$15 \cdot 12 \cdot 25 + 12 \cdot 15 \cdot 25$	9000
---	------

29a  $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{25} = 33554432.$  (elk van de 25 hokjes kan al dan niet zwart zijn)  
 29b  $\frac{33554432}{100} = 335545$  (velletjes)  $\Rightarrow 335545 \times 0,1 = 33554,5$  (mm  $\approx$  33,6 m).  
 29c  $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^9 = 512.$  (elk van de 9 hokjes binnen de rand kan al dan niet zwart zijn)

$2^{25}$	33554432
Ans/100*0.1	33554.432
$2^9$	512

30a  $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 144.$   
 30b  $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 144.$  (kan alleen mjmjmjm zijn)  
 30c  $1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$  (er is maar één student Frans)  
 30d  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 240.$  (de studenten economie als laatsten)  
 30e  $3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 960.$  (p?????p of e?????e)  
 (begin met het aanwijzen van de eerste en laatste student en daarna pas de anderen)  
 30f  $3 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 1440.$  (jmm???? of mjj????)

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	144
$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$	144
$1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	720

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$	240
$3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	960

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	1440
---	------

31a  $6 \times 5 \times 4 = 120.$  (elke letter mag maar één keer worden gebruikt)  
 31b  $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216.$  (elke letter mag vaker worden gebruikt)  
 $6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1956.$   
 $6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 = 55986.$

$6 \cdot 5 \cdot 4$	120
$6^3$	216
$6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	1956
$6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6$	55986

32a  $3 \times 6 \times 6 \times 3 \times 3 = 972.$  (begin met een 2, 3 of 4)  
 32b  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 360.$   
 32c Eerste cijfer een 5 en tweede cijfer een 6 of 7 (en bij de laatste twee cijfers geen 5)  
 OF eerste cijfer een 6 of 7 en bij de volgende twee geen 5  
 OF eerste cijfer een 6 of 7 en bij de volgende twee wel een 5.  
 $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1$  (de vijf)  $\cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1$  (de vijf)  $\cdot 2 \cdot 1 = 192.$   
 32d Bij de laatste twee cijfers geen 5 (bij de eerste drie cijfers al dan niet een 5)  
 OF bij de eerste drie cijfers geen 5 en bij de laatste twee cijfers wel (laatste twee cijfers dus  $5\bar{5}$  of  $\bar{5}5$ )  
 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 480.$

$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3$	972
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$	360

$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1$	192
---	-----

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	480
---	-----

33a  $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19958400.$  33c  $12^8 = 429981696.$   
 33b  $12 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 233846052.$  33d  $12 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1932612.$   
 (12 mogelijkheden voor laag 2, 3 en 5)

$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$	19958400
$12 \cdot 11^7$	233846052

$12^8$	429981696
$12 \cdot 11^5$	1932612

- 34a Hoeveel vier-lettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?  
 34b Hoeveel drie-lettercodes zijn er met drie verschillende letters?  
 34c Hoeveel lettercodes zijn er van twee letters met verschillende letters of met drie letters waarbij herhalingen zijn toegestaan?  
 34d Hoeveel drie-lettercodes zijn er als er geen gelijke letters naast elkaar mogen staan?

35a  $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$  35b  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$

$10 \cdot 9 \cdot 8$	720
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	3628800

\*\*\* **Neem GR-practicum 2A door.** (de uitwerkingen vind je op het laatste blad)

36  $12nPr5 = 95040.$  37  $14nPr10 = 3632428800.$   
 38a  $4nPr4 = 4! = 24.$  (een pincode bestaat uit 4 cijfers) 38b  $1 \cdot 3nPr3 = 1 \cdot 3! = 3! = 6.$

MATH NUM CPX	1233
1:rand	
2:nPr	12 nPr 5
3:nCr	95040
4:!	
5:randIntC	14 nPr 10
6:randNormC	3632428800
7:randBinC	

$4 \cdot nPr \cdot 4$	24
$4!$	24
$3!$	6

- 39a  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$  (volgordes)  $\Rightarrow 6! \times 6 \times 2 = 8640$  (sec = 144 min). 

6!	720
Ans*6*2	8640
Ans/60	144
- 39b  $8! = 40320$  (volgordes)  $\Rightarrow 8! \times 8 \times 2 = 645120$  (sec = 179,2 uur). 

8!	40320
Ans*8*2	645120
Ans/60/60	179.2
- 40a  $9 \text{ nPr } 9 = 9! = 362880$ .      40b  $9 \cdot 8 = 9 \text{ nPr } 2 = 72$ .      40c  $9 \text{ nPr } 6 = 60480$ . 

9!	362880
9 nPr 2	72
9 nPr 6	60480
- 41a Hoeveel zes-lettercodes zijn er met zes verschillende letters? (uit de gegeven 6 letters)
- 41b Hoeveel drie-lettercodes zijn er met drie verschillende letters? (uit de gegeven 6 letters)
- 41c Hoeveel vier-lettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
- 41d Hoeveel vier-lettercodes zijn er, waarbij de eerste letter een a of een b is en de andere letters moeten worden gekozen uit c, d, e en f waarbij herhalingen zijn toegestaan?
- 42a   $8! = 40320$ .
- 42b  Het aantal mogelijke rangschikkingen waarbij het pakketje wiskundeboeken als 1 telt is 4! Maar binnen dat pakketje wiskundeboeken zijn er 5! mogelijke rangschikkingen. Het totaal aantal is  $4! \cdot 5! = 2880$ . 

8!	40320
4!*5!	2880
- 42c  De twee pakketjes kunnen op 2 manieren gezet worden (eerst de scheikundeboeken en dan de wiskundeboeken of omgekeerd) Binnen het pakketje wiskundeboeken zijn er 5! mogelijke rangschikkingen en binnen het pakketje scheikundeboeken zijn er 3! mogelijke volgorden  $\Rightarrow 2 \cdot 5! \cdot 3! = 1440$ . 

2*5!*3!	1440
---------	------
- 43a Kies eerst een klassiek stuk en dan een hedendaags stuk om mee te eindigen. Aantal =  $3$  (klassiek aan begin)  $\cdot 2$  (klassiek aan eind)  $\cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 7! = 30240$ . 

6*7!	30240
------	-------
- 43b Neem eerst de vier romantische stukken als één pakket (met 4! rangschikkingen). Aantal =  $6! \cdot 4! = 17280$ . 

6!*4!	17280
-------	-------
- 43c  $\bar{r}\bar{r}\bar{r}\bar{r}\bar{r}\bar{r}\bar{r}\bar{r} \Rightarrow$  Aantal =  $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4! = 2880$ . 

5!*4!	2880
-------	------
- 43d  $[kkk][rrrr][hh]$  als 3 pakketjes kan al op 3! manieren  $\Rightarrow$  Aantal =  $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2! = 1728$ . 

3!*3!*4!*2!	1728
-------------	------
- 44a DOP DPO OPD ODP PDO POD.      44b POP PPO OPP.
- 44c Verander je de D van DOP in een P, dan worden DOP en POD in 44a beide POP.
- 
- 45a   $\frac{10!}{4!} = 151200$ . (dubbele eruit delen) 

10!/4!	151200
11!/2!/2!/2!/2!	2494800
- 45c   $\frac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 3632428800$ . 

16!/3!/5!/2!^3	3632428800
11!/4!^2/2!	34650
- 45b   $\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2494800$ .      45d   $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$ .
- 46  $\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200$ . 

10!/4!/3!^2	4200
-------------	------
- 47a  $4 \times 3 = 4 \text{ nPr } 2 = 12$ . 

4 nPr 2	12
---------	----

      47b De helft van 12, dus 6. 

4 nPr 2	12
Ans/2!	6
4 nCr 2	6
- \*\*\*  **Neem GR - practicum 2B door.** (de uitwerkingen vind je op het laatste blad)
- 48a  Combinaties. (het gaat om een zestal leerlingen, zonder verdere rangschikking)
- 48b  Permutaties. (het gaat om een drietal prijzen met een rangschikking, namelijk 1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup> en 3<sup>e</sup> prijs)
- 48c  Combinaties. (het gaat om een vijftal kaartjes, zonder verdere rangschikking)
- 48d  Combinaties. (het gaat om een vijftal leraren, zonder verdere rangschikking)
- 48e  Permutaties. (het gaat om een drietal nummers met een rangschikking, namelijk 1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup> en 3<sup>e</sup> plaats)
- 49a   $\binom{18}{4} = 18 \text{ nCr } 4 = 3060$ . 

18 nCr 4	3060
45 nCr 6	8145060
- 49c   $\binom{20}{5} = 20 \text{ nCr } 5 = 15504$ .      49e   $16 \cdot 15 = 240$ . 

20 nCr 5	15504
16*15	240
18 nCr 2	153
16 nPr 2	240
- 49b   $\binom{45}{6} = 45 \text{ nCr } 6 = 8145060$ .      49d   $\binom{18}{2} = 18 \text{ nCr } 2 = 153$ .
- 50a   $\binom{12}{3} = 220$ . 

12 nCr 3	220
10 nCr 5	252
12*10*7	840
- 50d   $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 29 \text{ nPr } 5 = 14250600$ . 

29 nPr 5	14250600
9!*12!*10!	6*307583811e20
7 nCr 3	35
- 50b   $\binom{10}{5} = 252$ .
- 50e   $9!$  (7 Ned. cd's en 2 pakketten)  $\cdot 12! \cdot 10! \approx 6,3 \cdot 10^{20}$ .
- 50c   $12 \cdot 10 \cdot 7 = 840$ .      50f   $\binom{7}{3} = 35$ .

- 51a  $\binom{15}{5} = 3003$ . 51b  $\binom{13}{5} = 1287$ , dus het aantal vermindert met  $3003 - 1287 = 1716$ .
- 52a  $\binom{28}{8} = 3108105$ . 52c  $\binom{8}{5} = 56$ .
- 52b  $8 nPr 8 = 8! = 40320$ . 52d  $\binom{20}{6} = 38760$ .
- 53a Een negenhoek heeft 9 zijden; de hoekpunten hebben  $\binom{9}{2} = 36$  verbindingslijnstukjes  $\Rightarrow 36 - 9 = 27$  diagonalen.
- 53b In een negenhoek zijn  $\binom{9}{3} = 84$  driehoeken te maken (aantal drietallen uit 9 hoekpunten).
- 53c Het aantal diagonalen in een  $n$ -hoek is  $\binom{n}{2} - n$ .
- 54a  $\binom{60}{5} = 5461512$ . 54b  $\binom{40}{4} = 91390$ . 54c  $\binom{60}{5} \cdot \binom{40}{4} \approx 4,99 \times 10^{11}$  (499 miljard).
- 55a  $\binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} = 1680$ . 55b  $\binom{6}{6} = 1$ . (een zestal uit 6 jongens)
- 55c  $\binom{6}{6} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} = 55$ . (geen meisje en dus 6 jongens of 1 meisje en 5 jongens)
- 55d  $\binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} + \binom{6}{6} = 55$ . (5 jongens en dus 1 meisje of 6 jongens en geen meisje)
- 56a  $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 180$ .
- 56b  $\binom{5}{4} \cdot \binom{7}{1} + \binom{5}{5} = 36$ .
- 56c  $\binom{8}{5} + \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{1} = 336$ .
- 56d  $\binom{7}{5} = 21$ .
- 57a  $\binom{60}{4} = 487635$ . 57b  $\binom{54}{4} = 316251$ . 57c  $\binom{6}{2} \cdot \binom{54}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{54}{1} + \binom{6}{4} = 22560$ .
- 58a  $\binom{36}{8} = 30260340$ .
- 58b  $\binom{36}{4} \cdot \binom{33}{4} = 2410392600$ .
- 58c  $\binom{20}{2} \cdot \binom{36}{5} \cdot \binom{13}{1} = 931170240$ .
- 58d  $\binom{36}{7} \cdot \binom{33}{1} + \binom{36}{8} = 305733780$ .
- 58e  $\binom{16}{2} \cdot \binom{53}{6} = 2754897600$ .
- 59a  $\binom{44}{6} = 7059052$  (mogelijke combinaties). Nee, het scheelt  $7059052 - 5000000 = 2059052$ .
- 59b Uit te keren over een periode van 20 jaar:  $\frac{2}{3} \times 27\,000\,000 = 18\,000\,000$  (\$).  
Winst:  $18\,000\,000 - 5\,000\,000$  (kosten van 5 miljoen formulieren) =  $13\,000\,000$  (\$).  
20 jaar heeft 240 maanden  $\Rightarrow$  winst per maand per deelnemer is (20 jaar lang)  $\frac{13\,000\,000}{20 \cdot 12 \cdot 2500} = 21,67$  (\$).
- 60a Hoeveel volgordes zijn mogelijk met 7 verschillende dingen?
- 60b Op hoeveel manieren kun je 3 van de 7 vakjes zwart maken?
- 60c Op hoeveel manieren kun je één jongen en één meisje kiezen uit een groep van 7 jongens en 3 meisjes?
- 60d Hoeveel drie-lettercodes zijn er te maken met de letters a, b, c, d, e, f en g waarbij iedere letter meerdere keren mag voorkomen?
- 60e Op hoeveel manieren kun je 7 drie-keuzevragen beantwoorden?
- 60f Op hoeveel manieren kun je een voorzitter, een secretaris en een penningmeester kiezen uit 7 mensen?
- 61a  $\binom{17}{0} = 1$ ,  $\binom{17}{1} = 17$ ,  $\binom{17}{16} = 17$  en  $\binom{17}{17} = 1$ . 61c  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = n$ ,  $\binom{n}{n-1} = n$  en  $\binom{n}{n} = 1$ .
- 61b Je kunt op één manier 0 personen kiezen (dus 17 personen niet kiezen) uit een groep van 17, je kunt op 17 manieren 1 persoon kiezen uit een groep van 17, je kunt op 17 manieren 16 personen kiezen (dus 1 persoon niet kiezen) uit een groep van 17 en je kunt op één manier 17 personen kiezen uit een groep van 17.

62a  $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} \approx 1,2 \times 10^{10}$ . 62c  $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} = 560$ .

62b  $\binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6} \approx 1,4 \times 10^{18}$ . 63  $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{6} = \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} = 840$ .

64 Noem de groepen A, B en C. Dan een woord van 12 letters, waarvan 3 A's, 4 B's en 5 C's  $\Rightarrow$  aantal =  $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$ .

65a Combinaties, de volgorde waarin de groene vierkantjes gekozen worden is niet van belang.

65b  $\binom{6}{2} = 15$ .

66a  $2^{10} = 1024$ . 66c  $\binom{10}{5} = 252$ . 66e  $1 \cdot \binom{8}{3} \cdot 1 = \binom{8}{3} = 56$ .

66b  $\binom{10}{8} = 45$ . 66d  $1 \cdot 1 \cdot 2^8 = 2^8 = 256$ .

67a  $2^{20} = 1048576$ . 67c Minstens 80% van de 20 vragen, dus minstens 16 vragen.

67b  $\binom{20}{15} = 15504$ . Dus  $\binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 6196$  mogelijkheden.

Dat is in  $\frac{6196}{1048576} \times 100\% \approx 0,6\%$  van alle mogelijkheden.

68a  $2^{19} = 524288$ . 68c  $\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} = 1 + 19 + \binom{19}{2} = 191$ .

68b  $\binom{19}{5} = 11628$ . 68d  $2^{16} = 65536$ . (de andere 16 aan of uit)

69a  $\binom{12}{5} = 792$ . 69c  $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 277200$ .

69b  $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3} = 27720$ .

70a  $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 2^9$ .

$\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{4} + \binom{9}{3} + \binom{9}{2} + \binom{9}{1} + \binom{9}{0} = 2^9 \Rightarrow \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \frac{2^9}{2} = 2^8 = 256$ .

70b  $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 2^{10}$ .

$\binom{10}{10} + \binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \binom{10}{7} + \binom{10}{6} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 2^{10} \Rightarrow \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = \frac{2^{10} - \binom{10}{5}}{2} = 386$ .

70c  $\binom{14}{0} + \binom{14}{1} + \binom{14}{2} + \binom{14}{3} + \binom{14}{4} + \binom{14}{5} + \binom{14}{6} + \binom{14}{7} + \binom{14}{8} + \binom{14}{9} + \binom{14}{10} + \binom{14}{11} + \binom{14}{12} + \binom{14}{13} + \binom{14}{14} = 2^{14}$ .

$\binom{14}{1} + \binom{14}{2} + \binom{14}{3} + \binom{14}{4} + \binom{14}{5} + \binom{14}{6} + \binom{14}{7} + \binom{14}{8} + \binom{14}{9} + \binom{14}{10} + \binom{14}{11} + \binom{14}{12} + \binom{14}{13} = 2^{14} - \binom{14}{0} - \binom{14}{14} = 2^{14} - 1 - 1 = 16382$ .

71a  $\binom{25}{0} + \binom{25}{1} + \binom{25}{2} + \binom{25}{3} + \binom{25}{4} + \binom{25}{5} + \binom{25}{6} + \binom{25}{7} + \binom{25}{8} + \binom{25}{9} + \binom{25}{10} + \binom{25}{11} + \binom{25}{12} = \frac{2^{25}}{2} = 2^{24} = 16777216$ .

71b  $\binom{25}{14} + \binom{25}{15} + \binom{25}{16} + \binom{25}{17} + \binom{25}{18} + \binom{25}{19} + \binom{25}{20} + \binom{25}{21} + \binom{25}{22} + \binom{25}{23} + \binom{25}{24} + \binom{25}{25} = \frac{2^{25}}{2} - \binom{25}{13} = 11576916$ .

71c  $2^{25} - \binom{25}{0} - \binom{25}{25} = 2^{25} - 1 - 1 = 33554430$ .

72a Bijvoorbeeld: NNNNOOOO en NNNNONOOO. 72c Totaal 8 letters waarvan 4 de letter N.

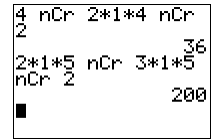
72b NOONNNOO wel, maar NNOONNONO (5 letters N) niet. 72d  $\binom{8}{4} = 70$ .

73a  $\binom{14}{8} = 3003$ . 73b  $\binom{8}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{2} = 2240$ . 73c  $\binom{7}{3} \cdot \binom{8}{5} = 1960$ .

74a  $\binom{5}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{8}{3} = 11200$ . 74b  $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{2}{1} = 2016$ .

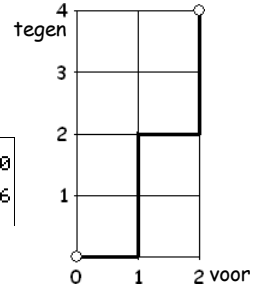
75a Alleen rechtstreeks van P naar Q.  
Aantal routes van A naar B =  $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$ .

75b Aantal routes van A naar B  
= 2 × aantal routes via de linkerkant  
=  $2 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} = 200$ .



76a  $\binom{12}{4} \cdot \binom{15}{3} = 225225$ .

76b  $\binom{12}{4} \cdot \binom{10}{4} = 103950$ .

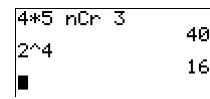


77a Zie het rooster hiernaast.

77c  $\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} = 40$ . (na rust is de score 2-3)

77b  $\binom{6}{4} = 15$ .

77d  $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$ .



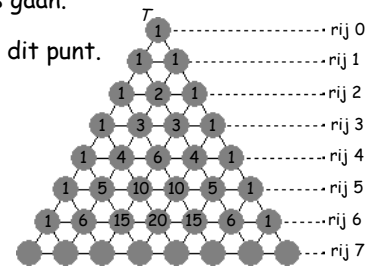
78a Om van T in A te komen moet je 6 wegen doorlopen waarvan twee wegen naar rechts gaan.

78b Om in het punt linksonder te komen, moet je 0 keer naar rechts, dus  $\binom{6}{0}$  routes naar dit punt.

Zo zijn er  $\binom{6}{1}$  routes naar het punt ernaast,  $\binom{6}{2}$  routes naar A, enz.

Op de zesde rij staan dus de getallen  $\binom{6}{0}$ ,  $\binom{6}{1}$ ,  $\binom{6}{2}$ ,  $\binom{6}{3}$ ,  $\binom{6}{4}$ ,  $\binom{6}{5}$  en  $\binom{6}{6}$ .

De som van deze getallen is  $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6 = 64$ .



78c Zie de figuur hiernaast.

78d De getallen op de zevende rij:  $1; 1+6=7; 6+15=21; 15+20=35; 20+15=35; 15+6=21; 6+1=7$  en 1.

Op de achtste rij:  $1; 1+7=8; 7+21=28; 21+35=56; 35+35=70; 35+21=56; 21+7=28; 7+1=8$  en 1.

78e  $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 2^{10} = 1024$ .

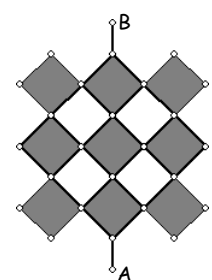
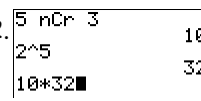
79a  $\binom{10}{3} = 120$ .

79b  $\binom{10}{9} = 10$ .

79c  $2^{10} = 1024$ .

79d Van S naar Y zijn er  $\binom{5}{3} = 10$  en van Y naar het strand zijn er  $2^5 = 32$ .

Dus er zijn  $10 \times 32 = 320$  routes van S via Y naar het strand.



80 Vervang de kwartbogen door rechte lijnstukjes. Je loopt dan in het rooster hiernaast.

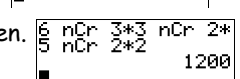
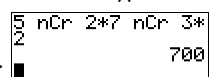
Het aantal kortste routes van A naar B is  $1 \cdot \binom{6}{3} \cdot 1 = \binom{6}{3} = 20$ .

81a Elke kortste route van W naar D is goed  $\Rightarrow \binom{8}{4} = 70$ .

81b Elke kortste route van G via een middelste E's naar de laatste E is goed  $\Rightarrow \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot 2 = 700$ .

81c Denk een punt (P) achter de zin, daar kun je alleen komen vanaf een van de twee laatste S-en.

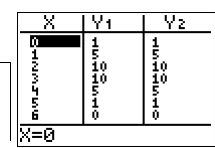
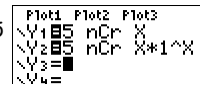
Elke kortste route van V via E en via een T naar de P is goed  $\Rightarrow \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 = 1200$ .



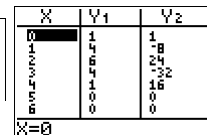
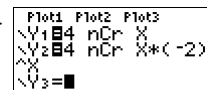
82a  $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$   
 $= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

82b  $(a+b)^1 = 1a + 1b$   
 $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$   
 $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$   
 $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$   
 $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

83a  $(a+1)^5 = \binom{5}{0} \cdot a^5 + \binom{5}{1} \cdot a^4 \cdot 1 + \binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{3} \cdot a^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{4} \cdot a \cdot 1^4 + \binom{5}{5} \cdot 1^5$   
 $= a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$ .



83b  $(a-2)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot (-2) + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot (-2)^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot (-2)^3 + \binom{4}{4} \cdot (-2)^4$   
 $= a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$ .



Plot1	Plot2	Plot3
$Y_1 = 5$	$nCr X$	$X \cdot 2^{(5-X)}$
$Y_2 = 5$	$nCr X$	$X \cdot 2^{(5-X)}$
$Y_3 = 5$	$nCr X$	$X \cdot 2^{(5-X)}$

X	Y1	Y2
0	1	32
1	5	240
2	10	720
3	10	1080
4	5	810
5	1	243

83c  $(2a+3)^5 = \binom{5}{0} \cdot (2a)^5 + \binom{5}{1} \cdot (2a)^4 \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot (2a)^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot (2a)^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot (2a) \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^5$   
 $= 32a^5 + 240a^4 + 720a^3 + 1080a^2 + 810a + 243.$

83d  $(3a-1)^6 = \binom{6}{0} \cdot (3a)^6 + \binom{6}{1} \cdot (3a)^5 \cdot (-1) + \binom{6}{2} \cdot (3a)^4 \cdot (-1)^2 + \binom{6}{3} \cdot (3a)^3 \cdot (-1)^3 + \binom{6}{4} \cdot (3a)^2 \cdot (-1)^4$   
 $+ \binom{6}{5} \cdot (3a) \cdot (-1)^5 + \binom{6}{6} \cdot (-1)^6 = 729a^6 - 1458a^5 + 1215a^4 - 540a^3 + 135a^2 - 18a + 1.$

Plot1	Plot2	Plot3
$Y_1 = 6$	$nCr X$	$X \cdot 3^{(6-X)}$
$Y_2 = 6$	$nCr X$	$X \cdot 3^{(6-X)}$
$Y_3 = 6$	$nCr X$	$X \cdot 3^{(6-X)}$

X	Y1	Y2
0	1	729
1	6	1458
2	15	1215
3	20	540
4	15	135
5	6	18
6	1	1

84a  $(a+b)^{15}$  heeft 16 termen met de coëfficiënten  $\binom{15}{0}, \binom{15}{1}, \binom{15}{2}, \binom{15}{3}, \dots, \binom{15}{14}, \binom{15}{15}.$

84b De derde term van de herleiding van  $(a+b)^{15}$  is  $\binom{15}{2} \cdot a^{13} \cdot b^2 = 105a^{13}b^2$   
 en de dertiende term is  $\binom{15}{12} \cdot a^3 \cdot b^{12} = 455a^3b^{12}.$

15 nCr 2	105
15 nCr 12	455

85a De vierde term van de herleiding van  $(p+q)^{20}$  is  $\binom{20}{3} \cdot p^{17} \cdot q^3 = 1140p^{17}q^3.$

85b De zevende term van de herleiding van  $(2p-q)^9$  is  $\binom{9}{6} \cdot (2p)^3 \cdot (-q)^6 = 672p^3q^6.$

20 nCr 3	1140
9 nCr 6 * 2^3 * (-1)^6	672

86a De term met  $x^8$  in  $(x^2+1)^8$  is  $\binom{8}{4} \cdot (x^2)^4 \cdot 1^4 = 70x^8.$  Dus de coëfficiënt van  $x^8$  is 70.

86b De term met  $x^8$  in  $(\frac{1}{2}x-2)^{11}$  is  $\binom{11}{3} \cdot (\frac{1}{2}x)^8 \cdot (-2)^3 = -5 \frac{5}{32} x^8.$  Dus de coëfficiënt van  $x^8$  is  $-5 \frac{5}{32}.$

8 nCr 4 * 1^4	70
---------------	----

11 nCr 3 * (1/2)^8 * (-2)^3	-5.15625
Ans+5*Frac	-5/32

87a  $(1+1)^6 = \binom{6}{0} \cdot 1^6 + \binom{6}{1} \cdot 1^5 \cdot 1 + \binom{6}{2} \cdot 1^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4} \cdot 1^2 \cdot 1^4 + \binom{6}{5} \cdot 1 \cdot 1^5 + \binom{6}{6} \cdot 1^6 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}.$

87b  $(1+1)^6 = 2^6 = 64 \Rightarrow \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64.$

2^6	64
-----	----



**Diagnostische toets**

D1a  5 mogelijkheden om samen 8 te gooien.  
(zie het eerste rooster hiernaast)

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
+	1	2	3	4	5	6

D1b  10 mogelijkheden om samen meer dan 8 te gooien.  
(zie het eerste rooster hiernaast)

D1c  17 mogelijkheden waarbij het product van de ogen minder dan 10 is.  
(zie het tweede rooster hiernaast)

6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
x	1	2	3	4	5	6

D2a  Uitschrijven: 111, 112, 121, 211, 113, 131, 311, 122, 212 en 221  $\Rightarrow$  10 mogelijkheden.

D2b  Uitschrijven: 114, 141, 411, 123, 132, 213, 231, 312, 321 en 222  $\Rightarrow$  10 mogelijkheden.

D3  Alleen de vader (zie het grijze vak in het rooster hiernaast)  $\Rightarrow$  11 eerstejaars studenten.

va\mo	wel	niet	
wel	4	11	15
niet	16	69	85
	20	80	100

D4a   $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7 \text{ nPr } 5 = 2520$ .

D4b   $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$ . (als eerste cijfer alleen een 2, een 3 of een 4)

D4c   $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16807$ .

D4d   $1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$  (getallen tussen 54000 en 60000) +  $3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$  (getallen boven 60000) = 8918.

7 nPr 5	2520
3*6*5*4*3	1080
7^5	16807

5*7^3+3*7^4	8918
-------------	------

D5a   $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \text{ nPr } 8 = 8! = 40320$ . (deze opgave gaat over 8 verschillende fietsen)

D5b   $6!$  (tel eerst de jongensfietsen als 1 pakket)  $\cdot 3!$  (mogelijkheden met de 3 jongensfietsen) = 4320.

D5c   $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4$  (zet eerst twee meisjesfietsen aan de buitenkant) =  $5 \cdot 4 \cdot 6! = 14400$ .

8!	40320
6!*3!	4320
5*4*6!	14400

D6a   $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$ . (dubbele letters eruit delen)

7!/2!/2!	1260
8!/3!/2!	3360

D6c   $\frac{10!}{2! \cdot 3!} = 302400$ .

10!/2!/3!	302400
10!/2!/4!	75600

D6b   $\frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$ . (dubbele letters eruit delen)

D6d   $\frac{10!}{2! \cdot 4!} = 75600$ .

D7a   $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 225$ .

6 nCr 2*5*3	225
6 nCr 2*8 nCr 2	420

D7c   $\binom{5}{3} \cdot \binom{9}{1} + \binom{5}{4} = 95$ . (3 of 4 witte)

5 nCr 3*9 nCr 1+	95
5 nCr 4	330

D7b   $\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{2} = 420$ . (2 rode en 2 andere)

D7d   $\binom{11}{4} = 330$ . (4 niet zwarte)

D8a   $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = 3150$ .

10 nCr 4*6 nCr 4	3150
*2 nCr 2	3150
10 nCr 4*6 nCr 4	3150

D8b  De verdelingen 6 6 8 en 6 7 7 kunnen elk op 3 manieren.

$$3 \cdot \binom{20}{6} \cdot \binom{14}{6} \cdot \binom{8}{8} + 3 \cdot \binom{20}{6} \cdot \binom{14}{7} \cdot \binom{7}{7} = 748261800$$

20 nCr 6*14 nCr 8	249420600
6+20 nCr 6*14 nCr 7	748261800
Ans*3	748261800

D9a   $2^{16} = 65536$ . (elk hokje al dan niet groen)

D9b   $\binom{16}{8} = 12870$ .

D9c   $\binom{16}{14} + \binom{16}{15} + \binom{16}{16} = 137$ .

2^16	65536
16 nCr 8	12870
16 nCr 14+16 nCr 15+16 nCr 16	137

D10   $\binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \dots + \binom{12}{11} = 2^{12} - \binom{12}{0} - \binom{12}{12} = 2^{12} - 1 - 1 = 4094$ .

2^12-1-1	4094
----------	------

D11a   $\binom{11}{4} = 330$ .

D11b   $\binom{7}{2} \cdot \binom{4}{2} = 126$ .

D11c   $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} = 72$ .

11 nCr 4	330
7 nCr 2*4 nCr 2	126
4 nCr 1*3 nCr 1*	72
4 nCr 2	72

D12   $\binom{4}{1}$  (naar de linker S) +  $\binom{4}{2}$  (naar de middelste S) +  $\binom{4}{3}$  (naar de rechter S) = 14.

4 nCr 1+4 nCr 2+	14
4 nCr 3	14

D13a   $(a-5)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot (-5) + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot (-5)^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot (-5)^3 + \binom{4}{4} \cdot (-5)^4$   
 $= a^4 - 20a^3 + 150a^2 - 500a + 625$ .

D13b  De derde term van  $(2p-3)^3$  is  $\binom{5}{2} \cdot (2p)^3 \cdot (-3)^2 = 720p^3$ .

5 nCr 2*2^3*(-3)^2	720
--------------------	-----

P1ot1	P1ot2	P1ot3
V1=4	nCr X	X
V2=4	nCr X*(-5)	X
V3=		
V4=		
V5=		
V6=		
X=0		
X	V1	V2
1	1	1
4	4	20
6	6	150
4	4	-500
1	1	625
0	0	0
0	0	0

Gemengde opgaven 1. Combinatoriek

	< 25	≥ 25	
vrouw	174	201	375
man	38	150	188
	212	351	563

G1a 150 mannen van 25 jaar en ouder.

G1b  $\frac{201}{351} \times 100\% \approx 57,3\%$

G2a  $\binom{6+14+5}{3} = \binom{25}{3} = 2300$

$$\frac{25 \text{ nCr } 3}{1+14 \text{ nCr } 3} = \frac{2300}{1638}$$

G2c  $\binom{6}{1} \cdot \binom{14}{1} \cdot \binom{5}{1} + \binom{6}{1} \cdot \binom{14}{1} \cdot \binom{3}{1} + \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} + \binom{14}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}$

G2b  $\binom{14}{2} \cdot \binom{6+5+3}{1} + \binom{14}{3} = 1638$

$\frac{6 \cdot 14 \cdot 5 + 6 \cdot 14 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 3 + 14 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 3 + 14 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3780}{972}$

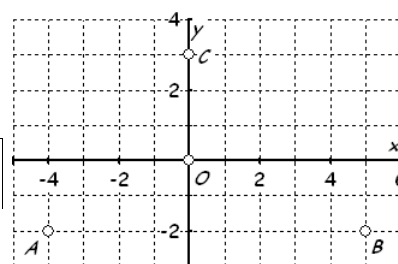
G3a  $2^3 = 8$

$$\frac{2^3}{2+2^2+2^3+2^4} = \frac{8}{30}$$

G3b  $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30 \Rightarrow$  Ja, want ons alfabet bestaat uit 26 letters.

G4a Aantal routes  $OB CAO = \binom{7}{2} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{6}{2} = 10001880$

$$\frac{7 \text{ nCr } 2 \cdot 10 \text{ nCr } 5 \cdot 9 \text{ nCr } 5 \cdot 6 \text{ nCr } 2}{5 \cdot 1} = \frac{10001880}{2646}$$



G4b Aantal routes  $OABCO = \binom{6}{2} \cdot \binom{10}{5} \cdot 1 = 3780$

G4c Aantal routes  $OB CAO =$  aantal routes  $OACBO = 10001880$ .  
Aantal routes  $OABCO =$  aantal routes  $OCBAO = 3780$ .

Aantal routes  $OBACO = \binom{7}{2} \cdot \binom{9}{5} \cdot 1 = 2646 =$  aantal routes  $OCABO$ .

Andere volgordes zijn er niet  $\Rightarrow$  kleinst aantal routes bij  $OBACO$  of  $OCABO$ .

G5a  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \text{ nPr } 5 = 6720$

G5b  $8^5 = 32768$

G5c  $1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6 \text{ nPr } 3 = 120$

G6a  $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 369600$

$$\frac{12 \text{ nCr } 3 \cdot 9 \text{ nCr } 3 \cdot 6 \text{ nCr } 3 \cdot 3 \text{ nCr } 3}{6 \text{ nCr } 3 \cdot 1} = \frac{369600}{12600}$$

G6b  $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = 12600$

$$\frac{10 \cdot 9 \text{ nCr } 2 \cdot 7 \text{ nCr } 3}{3 \cdot 1} = \frac{12600}{12600}$$

G7a  $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$ . (dubbele eruit delen)

$$\frac{8! / 3! / 3! / 2!}{6 \text{ nCr } 4 \cdot 8! / 2! / 2!} = \frac{560}{37800}$$

G7c  $6 \cdot \frac{8!}{3!} + \binom{6}{2} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 191520$

$$\frac{6 \cdot 8! / 3! + 6 \text{ nCr } 2 \cdot 8! / 2! / 2!}{8! / 2! / 2!} = \frac{191520}{191520}$$

G7b  $\binom{6}{4} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 37800$

Eén cijfer (hiervoor 6 mogelijkheden) komt drie keer voor  
OF twee cijfers ( $\binom{6}{2}$  mogelijkheden) komen elk twee keer voor.

G8a Kies eerst 6 landen (die de eerste thuiswedstrijd spelen) uit de 12 landen. Dat kan op  $\binom{12}{6}$  manieren.

Kies uit de overgebleven 6 landen bij elk gekozen land een tegenstander. Dit kan op 6! manieren.

Er zijn  $\binom{12}{6} \cdot 6! = 665280$  lotingen mogelijk.

G8b Trekken uit bokaal III:  $2^4$  manieren. Trekken uit bokaal I: 4! manieren.

De eerste vier ronden uit bokaal II:  $\binom{8}{4} \cdot 4!$  manieren. De vijfde en zesde ronde uit bokaal II:  $\binom{4}{2} \cdot 2!$  manieren.

Totaal aantal lotingen:  $2^4 \cdot 4! \cdot \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot \binom{4}{2} \cdot 2! = 7741440$

G8c In de voorronden worden  $6 \cdot 2 = 12$  wedstrijden gespeeld. In de poules worden  $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$  wedstrijden gespeeld. De finale is één wedstrijd. Dus totaal bestaat het toernooi uit  $12 + 12 + 1 = 25$  wedstrijden.

G9a  $\binom{12}{5} = 792$

G9b  $\binom{12}{5} \cdot 2^5 = 25344$

G10a  $\binom{12}{5} = 792$

G10c  $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} = 96$

G10b  $2^{12} = 4096$

G10d  $\binom{4}{2} \cdot 2^8 = 1536$

G11a  $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$  of  $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 2520$

G11b  $\frac{14!}{5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4!}$  of  $\binom{15}{5} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 2522520$

G12a  $(2x - 3y)^5 = \binom{5}{0} \cdot (2x)^5 + \binom{5}{1} \cdot (2x)^4 \cdot (-3y) + \binom{5}{2} \cdot (2x)^3 \cdot (-3y)^2 + \binom{5}{3} \cdot (2x)^2 \cdot (-3y)^3 + \binom{5}{4} \cdot (2x) \cdot (-3y)^4 + \binom{5}{5} \cdot (-3y)^5$   
 $= 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$

G12b De term met  $x^4y^6$  in  $(2x + 5y)^{10}$  is  $\binom{10}{6} \cdot (2x)^4 \cdot (5y)^6 = 5250000x^4y^6$

De coëfficiënt van  $x^4y^6$  is dus 5250000.

Plot1	Plot2	Plot3
$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{z}$
$\sqrt{x^2}$	$\sqrt{y^2}$	$\sqrt{z^2}$
$\sqrt{x^3}$	$\sqrt{y^3}$	$\sqrt{z^3}$
$\sqrt{x^4}$	$\sqrt{y^4}$	$\sqrt{z^4}$
$\sqrt{x^5}$	$\sqrt{y^5}$	$\sqrt{z^5}$
$\sqrt{x^6}$	$\sqrt{y^6}$	$\sqrt{z^6}$
$\sqrt{x^7}$	$\sqrt{y^7}$	$\sqrt{z^7}$
$\sqrt{x^8}$	$\sqrt{y^8}$	$\sqrt{z^8}$
$\sqrt{x^9}$	$\sqrt{y^9}$	$\sqrt{z^9}$
$\sqrt{x^{10}}$	$\sqrt{y^{10}}$	$\sqrt{z^{10}}$

X	Y1	Y2
0	1	32
1	5	240
2	10	720
3	10	10800
4	5	810
5	1	243
6	0	0
X=0		

G13a  $\square \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \dots + \binom{13}{6} = \frac{2^{13}}{2} = 2^{12} \Rightarrow \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \dots + \binom{13}{6} = 2^{12} - \binom{13}{0} = 2^{12} - 1 = 4095.$   $\square \begin{matrix} 2^{12}-1 \\ 4095 \end{matrix}$

G13b  $\square \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{9} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{10} = 2^{10} - 2 = 1022.$   $\square \begin{matrix} 2^{10}-2 \\ 1022 \end{matrix}$

G13c  $\square \binom{19}{0} + \binom{19}{2} + \binom{19}{4} + \binom{19}{6} + \binom{19}{8} + \dots + \binom{19}{16} + \binom{19}{18} = \binom{19}{19} + \binom{19}{17} + \binom{19}{15} + \binom{19}{13} + \binom{19}{11} + \dots + \binom{19}{3} + \binom{19}{1}.$

$\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} + \binom{19}{3} + \binom{19}{4} + \binom{19}{5} + \binom{19}{6} + \binom{19}{7} + \binom{19}{8} + \dots + \binom{19}{16} + \binom{19}{17} + \binom{19}{18} + \binom{19}{19} = 2^{19}.$

Dus  $\binom{19}{0} + \binom{19}{2} + \binom{19}{4} + \binom{19}{6} + \binom{19}{8} + \dots + \binom{19}{16} + \binom{19}{18} = \frac{2^{19}}{2} = 2^{18} = 262144.$   $\square \begin{matrix} 2^{19}/2 \\ 262144 \end{matrix}$

**TI-84 1A. Permutaties en faculteiten**

- 1a Het aantal permutaties van 5 uit 12 is  $12nPr5 = 95040$ .
- 1b  $4! \cdot 5! = 2880$ .
- 1c  $5! \cdot 3! + (4!)^2 = 1296$ .

```
MATH NUM CPX [2][3]
1:rand 12 nPr 5 95040
2:nPr
3:nCr 4!*5! 2880
4:1
5:randI 5!*3!+4!^2 1296
6:randN
7:randB
```

**TI-84 1B. Combinaties**

- 2a  $\binom{6}{2} = 15.$
- 2b  $\binom{6}{3} \cdot \binom{8}{4} = 1400.$
- 2c  $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3} + \binom{7}{4} = 235.$

```
MATH NUM CPX [2][3]
1:rand 6 nCr 2 15
2:nPr
3:nCr 6 nCr 3*8 nCr 4 1400
4:1
5:randI 5 nCr 2*6 nCr 3+
6:randN 7 nCr 4 235
7:randB
```